Devoir sur Table 4

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(Banque PT, Maths C 2023)

On considère la fonction F qui, à tout réel de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$ associe

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right)$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$, ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.
3. Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:
$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$
4. On s'intéresse dans ce qui suit à la série entière $\sum_{n\geqslant 1} f(n)x^{2n+1}$
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.
   (b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ ainsi que son rayon de convergence.
   (c) i. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, en précisant son rayon de convergence.
   ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$
   (d) Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en précisant le rayon de convergence que l'on comparera à la valeur R obtenue en 4.(a).

(e) Montrer que, pour tout réel x de $]-R,R[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln(1-x^2)$$

(f) Pour tout réel x de $]-R,R[$, exprimer, à l'aide des fonctions usuelles

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

On pourra utiliser sans la redémontrer l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,1,-\frac{1}{2}\right\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1}$$

(g) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$

Exercice 2

(Banque PT, Maths A 2012)

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f\circ g = g\circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f), \qquad g(x) \in E_\lambda(f)$$

Partie I

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2 . En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace Vect (e_1, e_2) soit stable par f et par g.

   En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n, n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
2. Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f^k = f\circ\cdots\circ f$ est la k-ième composée de f.

(a) Montrer que f et u commutent.

(b) Soit x un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. Vérifier que x est alors un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.

(c) Exprimer alors les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

(b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4$$

(c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.

4. On revient à un espace E général. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

(b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

(c) g est-il diagonalisable ?

(d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C}^n \\ & & P & \mapsto & (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array}$$

i. Vérifier que l'application φ est linéaire.

ii. Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad P(\lambda_i) = \mu_i$$

(e) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

(b) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant les résultats de la question 4. que, si une telle matrice N existe, alors,

- $Q^{-1}NQ$ est diagonale.
- Il existe deux réels α et β tels que $N = \alpha I_2 + \beta M$ où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

(c) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Exercice 3

(Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2006)

Dans tout l'exercice, on adopte la notation $\ln^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ln(x))^k$ et, par convention, on pose $\ln^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$).

Pour tout nombre réel strictement positif t, on pose : $\begin{cases} x(t) &= t\ln^3(t) \\ y(t) &= t\ln^2(t) \end{cases}$

On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.

On souhaite étudier l'arc paramétré $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$.

1. Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0 ?

   On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.
2. Déterminer, sur $]0,+\infty[$, les fonctions dérivées x' et y' puis étudier leur signe.
3. Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y.

   Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers. Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n, $\dfrac{n}{\mathrm{e}^2}$ ou bien $\dfrac{n}{\mathrm{e}^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
4. (a) Montrer que l'arc admet un unique point singulier pour un paramètre t_0 à déterminer et préciser la nature de ce point singulier.
   (b) Représenter sur un schéma, sans étude supplémentaire, l'allure de $\mathcal{C}$ lorsque t est au voisinage de t_0, en mettant en évidence la tangente au point singulier.
5. Étudier les éventuelles branches infinies de l'arc paramétrée ainsi que l'existence éventuelle d'une demi-tangente à l'arc au point de paramètre $t = 0$.
6. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$.
7. Tracer $\mathcal{C}$ sur le papier millimétré fourni en annexe en prenant pour unité graphique 4 cm.

   On donne les valeurs approchées suivantes (à 0.01 près) : $\mathrm{e}^{-2} \simeq 0,14$ *et* $\mathrm{e}^{-3} \simeq 0,05$.

Nom :